



# 行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

## 異向性層域材料之擴展裂紋動力破壞解析 Dynamic fracture analysis of a propagating crack in an anisotropic composite layered medium

計畫編號：NSC 90-2212-E032-011

執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

主持人：應宜雄 淡江大學航空太空工程學系

計畫參與人員：莊淙斌 鍾煥生

### 一、中文摘要

本文對異向性多層複合材料反平面之擴展裂紋問題加以探討，獲得入射波與所有的複合材料邊界反射及繞射波對擴展裂紋尖端應力強度因子的影響。在本文中提出了一修正之線性座標轉換關係式，將本文難解之異向性問題轉換為其相對之等向性問題，此外亦提出了在一次拉普拉斯轉換域中之基本解使得我們可以以疊加的形式來處理圓柱波與裂紋之交互作用。最後利用 Cagniard-de Hoop method 做逆轉換以獲得時域中的解，並將所有的波對擴展裂紋尖端之應力強度因子的影響以簡潔顯示解的形式表示出來。數值結果方面則針對不同之材料常數、層域高度、負載位置與裂紋擴展速度來做不同的比較。

**關鍵詞：**擴展裂紋、多層介質、反平面、異向性

### Abstract

The transient analysis of dynamic anti-plane crack propagation with a constant velocity in an anisotropic layered medium is presented in this study. A modified linear coordinate transformation is introduced to reduce the anisotropic problem to an equivalent isotropic problem with a similar geometry configuration. Besides, a useful fundamental solution is proposed, and the solution can be determined by superposition of the fundamental solution in the Laplace transform domain. The Cagniard-de Hoop method of Laplace inversion is used to obtain the transient solution in time domain. The

final results for the stress intensity factor are expressed in compact formulations. Numerical calculations are also evaluated and discussed in detail.

**Keywords:** propagating crack, multi-layered medium, anisotropic, anti-plane

### 二、背景與目的

波傳問題存在於許多的實際應用中，如多層複合材料之非破壞性檢測。當應力波遇到邊界時會產生反射波，遇到裂紋尖端則會產生繞射波，由於應力波在上下邊界內會不斷地產生反射與繞射現象，造成域內會有無窮多個波，所以造成了解析上的困難。而實際應用時，若能瞭解更多波的行為效應，將會使應用的範圍更廣以及應用結果更準確。

Freund[1]處理了無窮域中之等向性平面擴展裂紋的問題。Ma[2, 3]以此為基準而處理了一系列無窮域中的動態擴展裂紋問題。Ma and Ing[4]提出反平面擴展裂紋基本解，並利用之解析了自由垂直與水平邊界對擴展裂紋尖端應力強度因子的影響。Ma and Liao[5]提出了一個線性座標轉換關係式，成功的將兩個異向性的半無窮域中的應力波傳問題轉成了等向性的問題；此法大大的減輕了處理異向性問題的難度且邊界並不會產生脫層或重複的問題。蔡傳暉[6]利用所發展的拉普拉氏域疊加法成功地克服了傳統無法解析特徵長度的困難，使彈性波與邊界或裂紋的反射與繞射效應得以獲得解析。故本研究推廣此疊加法於解析異向性的問題上，利用拉普拉氏域疊

加法與線性座標轉換關係式來處理異向性層域材料之擴展裂紋動力破壞問題。

### 三、反平面裂紋基本解

等向均質線彈性體的二維反平面波動方程式於靜止 \$(X, Y)\$ 座標中可寫成

$$\frac{\partial^2 w}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial Y^2} - b^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

其中 \$w\$ 為 \$z\$ 方向的位移，\$b\$ 為剪力波(shear wave)的慢度(slowness)，且

$$b = \frac{1}{v} = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}.$$

\$v\$ 是剪力波波速(shear wave speed)，\$\rho\$ 和 \$\mu\$ 分別為材料的剪力係數(shear modulus)與密度(density)。

將此二維反平面波動方程式以移動座標 \$(\zeta, Y)\$ 表示

$$\begin{aligned} (1 - b^2 v^2) \frac{\partial^2 u(\zeta, Y, t)}{\partial \zeta^2} + 2b^2 v \frac{\partial^2 u(\zeta, Y, t)}{\partial \zeta \partial t} + \frac{\partial^2 u(\zeta, Y, t)}{\partial Y^2} \\ = b^2 \frac{\partial^2 u(\zeta, Y, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 \$\zeta = X - vt\$。其應力位移關係式為

$$\tau_{yz} = \mu \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \tau_{xz} = \mu \frac{\partial w}{\partial \zeta}. \quad (3)$$

考慮一無窮大內含半無窮長裂紋之彈性體，裂紋位於負 \$\zeta\$ 軸上，其裂紋面上受一指數分佈的曳引力，邊界條件描述如下

$$\tau_{yz}(\zeta, 0, s) = e^{sY} H(-\zeta), \quad (4)$$

其中 \$s\$ 為拉氏轉換域參數，而 \$Y\$ 為一常數。其函數間相對之拉氏轉換關係如下

$$\bar{f}(x, y, s) = \int_0^\infty f(x, y, t) e^{-st} dt, \quad (5)$$

$$\bar{f}^*(\lambda, y, s) = \int_{-\infty}^\infty \bar{f}(x, y, s) e^{-s\lambda x} dx. \quad (6)$$

在 \$\text{Re}(\lambda) > \text{Re}(y)\$ 的限制下可解得拉氏轉換域中的應力與位移場如下

$$\tau_{yz}(\zeta, Y, s) = \frac{1}{2fi} \int_{\Gamma_j} \frac{r_+^*(\lambda) e^{-s(r_+^* Y - \lambda \zeta)}}{(y - \lambda) r_+^*(y)} d\lambda, \quad (7)$$

$$\tau_{xz}(\zeta, Y, s) = -\frac{1}{2fi} \int_{\Gamma_j} \frac{\lambda e^{-s(r_+^* Y - \lambda \zeta)}}{r_-^*(\lambda)(y - \lambda) r_+^*(y)} d\lambda, \quad (8)$$

$$\bar{w}(\zeta, Y, s) = -\frac{1}{2fi} \int_{\Gamma_j} \frac{e^{-s(r_+^* Y - \lambda \zeta)}}{-s r_-^*(\lambda)(y - \lambda) r_+^*(y)} d\lambda, \quad (9)$$

其中

$$r^*(\lambda) = \sqrt{b^2 - \lambda^2 + b^2 v^2 \lambda^2 - 2b^2 v \lambda}$$

$$= \sqrt{b + \lambda(1 - bv)} \sqrt{b - \lambda(1 - bv)} = r_+^*(\lambda) r_-^*(\lambda)$$

其應力強度因子在一次拉氏轉換域之解為

$$\bar{K}(s) = \lim_{\zeta \rightarrow \infty} \sqrt{2f\zeta} \tau_{yz}(\zeta, 0, s) = -\frac{\sqrt{2}\sqrt{1 - bv}}{\sqrt{s} r_+^*(y)}. \quad (10)$$

### 四、線性座標轉換關係式

考慮如圖 1 所示之異向性擴展裂紋問題，二維之反平面波動方程式可表示為

$$\begin{aligned} C_{55}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(x, y, t)}{\partial x^2} + 2C_{45}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(x, y, t)}{\partial x \partial y} \\ + C_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(x, y, t)}{\partial y^2} = \dots^{a(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(x, y, t)}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (11)$$

其中 \$w^{a(i)}(x, y, t)\$ 是 \$z\$ 方向的位移，\$C\_{kl}^{(i)}\$ 是彈性模數，\$\dots^{a(i)}\$ 是密度。將此二維之反平面波動方程式以移動座標表示

$$\begin{aligned} C_{55}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial \zeta'^2} + 2C_{45}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial \zeta' \partial y} + C_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial y^2} \\ = \dots^{a(i)} \left( v^2 \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial \zeta'^2} - 2v \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial \zeta' \partial t} + \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (12)$$

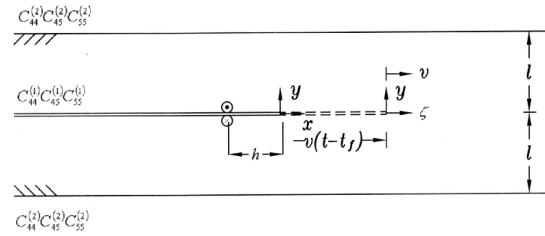


圖 1 二維多層板之異向性擴展裂紋問題座標示意圖

$$\tau_{yz}^{a(i)}(\zeta', y, t) = C_{44}^{(i)} \frac{\partial w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial y} + C_{45}^{(i)} \frac{\partial w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial \zeta'}. \quad (13)$$

$$\tau_{xz}^{a(i)}(\zeta', y, t) = C_{45}^{(i)} \frac{\partial w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial y} + C_{55}^{(i)} \frac{\partial w^{a(i)}(\zeta', y, t)}{\partial \zeta'}. \quad (14)$$

修正後之線性座標關係在此定義為

\$y \le 0\$ :

$$\zeta = \zeta' + r^{(i)} y + (i-1) \cdot l \cdot [r^{(1)} - r^{(2)}], \quad (15)$$

$$Y = s^{(i)} y + (i-1) \cdot l \cdot [s^{(2)} - s^{(1)}], \quad (16)$$

$$Z = z, \quad (17)$$

\$y \ge 0\$ :

$$\zeta = \zeta' + r^{(i)} y + (i-1) \cdot l \cdot [r^{(2)} - r^{(1)}], \quad (18)$$

$$Y = s^{(i)} y + (i-1) \cdot l \cdot [s^{(1)} - s^{(2)}], \quad (19)$$

$$Z = z, \quad (20)$$

其中  $i=1,2$  ,  $r^{(i)} = \frac{C_{45}^{(i)}}{C_{44}^{(i)}}$  ,  $s^{(i)} = \frac{C_e^{(i)}}{C_{44}^{(i)}}$  ,

$$C_e^{(i)} = \sqrt{C_{44}^{(i)} C_{55}^{(i)} - C_{45}^{(i)2}} .$$

利用(15)~(20)之關係式可將異向性之二維之反平面波動方程式轉成等向性的

$$\left[ \frac{C_e^{(i)2}}{C_{44}^{(i)}} - \dots a \nu^2 \right] \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta, Y, t)}{\partial \zeta^2} + 2 \dots a \nu \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta, Y, t)}{\partial \zeta \partial t} + \frac{C_e^{(i)2}}{C_{44}^{(i)}} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta, Y, t)}{\partial Y^2} = \dots a^{(i)} \frac{\partial^2 w^{a(i)}(\zeta, Y, t)}{\partial t^2}, \quad (21)$$

且

$$f_{YZ}^{a(i)}(\zeta, Y, t) = C_e^{(i)} \frac{\partial w^{a(i)}(\zeta, Y, t)}{\partial Y}, \quad (22)$$

$$f_{YZ}^{a(i)}(\zeta, Y, t) = \left( \frac{C_{45}^{(i)}}{C_{44}^{(i)}} \right) C_e^{(i)} \frac{\partial w^{a(i)}(\zeta, Y, t)}{\partial Y} + \left( \frac{C_e^{(i)}}{C_{44}^{(i)}} \right) C_e^{(i)} \frac{\partial w^{a(i)}(\zeta, Y, t)}{\partial \zeta}, \quad (23)$$

由(21)~(23)三式可知此異向性之反平面波動方程式已被成功地轉成與等向性相同型式的方程式，且由圖 2 可知轉換之後邊界仍保持連續

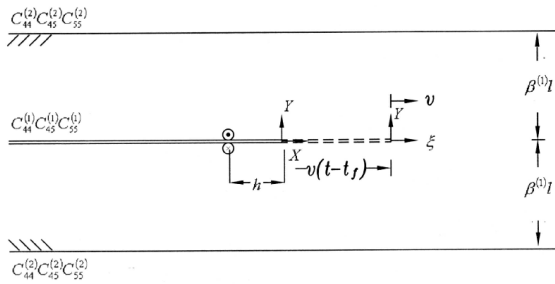


圖 2 轉換後之二維多層板之等向性擴展裂紋問題座標示意圖

## 五、擴展裂紋異向性多層問題分析

當時間  $t=0$  時，一對反平面動力點載荷突然施加在距離靜止裂紋尖端  $h$  處的裂紋面上，其與時間相關函數為單位步階函數，此邊界條件在一次拉氏轉換域中可表示為

$$\bar{f}_{YZ}(X, 0, s) = \frac{1}{2fi} \int_{\Gamma_j} -p e^{s_j(X+h)} d\zeta. \quad (24)$$

利用(7)與(24)式可得靜止裂紋入射波與繞射波時域解為

$$f_{YZ}^i(X, Y, t) = \frac{-pt \sin_s}{fr(t^2 - b_1^2 r^2)^{1/2}} H(t - b_1 r). \quad (25)$$

$$f_{YZ}^d(X, Y, t) = \frac{P}{2f^2} \times$$

$$\int_{b_1 h}^{t-b_1 h} \text{Re} \left[ H(Y_1^+, Y_2^+) \frac{\partial Y_1^+}{\partial t_1} \frac{\partial Y_2^+}{\partial t_2} - H(Y_1^-, Y_2^+) \frac{\partial Y_1^-}{\partial t_1} \frac{\partial Y_2^+}{\partial t_2} \right] dt_1 \quad (26)$$

靜止裂紋應力度因子為

$$K^S(t) = p \sqrt{(2/fh)} H(t - b_1 h). \quad (27)$$

現在假設當應力波一到達裂紋尖端時其應力度因子即超過其破壞韌性，所以裂紋開始擴展，因此以移動座標來繼續求解擴展裂紋的部分

$$\bar{f}_{YZ}(\zeta, 0, s) = \frac{1}{2fi} \int_{\Gamma_j} \frac{pd}{(j-d)} e^{s h(1-b_1 \nu) j + s j \zeta} d\zeta, \quad (28)$$

其中  $d=1/\nu$ 。

同樣可解出其擴展裂紋入射波時域解為

$$f_{YZ}^d(\zeta, Y, t) = \frac{-1}{2f^2} \times \int_{b_1 h}^{t-b_1 h} \text{Re} \left[ G(Y_1^+, Y_2^+) \frac{\partial Y_1^+}{\partial t_1} \frac{\partial Y_2^+}{\partial t_2} - G(Y_1^-, Y_2^+) \frac{\partial Y_1^-}{\partial t_1} \frac{\partial Y_2^+}{\partial t_2} \right] dt_1. \quad (29)$$

而其應力度因子對裂紋尖端之貢獻為

$$K^d(t) = K^0(t) = p \sqrt{\frac{2}{f \nu(t - b_1 h) + h}} \times (1 - b_1 \nu)^{1/2} H(t - b_1 h). \quad (30)$$

接下來處理由邊界反射回來之入射與繞射波

$$\bar{f}_{YZ}^{ir+dr}(\zeta, Y, s) = \frac{1}{4f^2} \int_{\Gamma_{Y_1}} \int_{\Gamma_{Y_2}} \frac{r_{1/2}^*(Y_2) p d r_{1+}^*(Y_2)}{(Y_1 - d)(Y_1 - Y_2) r_{1+}^*(Y_1)} \times e^{s h(1-b_1 \nu) Y_1} e^{s r_{1+}^*(Y_2 - 2s^{(1)} h) + s Y_2 \zeta} dY_2 dY_1 \quad (31)$$

其中  $r_{1/2}^* = \frac{\gamma_1 r_{1+}^* - \gamma_2 r_{2+}^*}{\gamma_1 r_{1+}^* + \gamma_2 r_{2+}^*}$  為反射係數。

而其應力度因子對裂紋尖端之貢獻為

$$K^{ind}(t) = K^1(t) = \frac{-\sqrt{2} p d \sqrt{1-b_1 \nu}}{f^2} \int_{t_{ind}}^t \frac{1}{\sqrt{t-\zeta}} \times \text{Im} \left[ \frac{r_{1/2}^*(\zeta) \frac{\partial f^*}{\partial t}}{(f^* - d) r_{1+}^*(\zeta)} \right]_{t=\zeta} d\zeta. \quad (32)$$

其中

$$j^+ = \frac{-h(1-b_1 \nu)t - 4b_1^2 \nu (s^{(1)} t)^2 \pm r_2^{(1)} s^{(1)} t^2 - b_1^2 \{[ \nu t + h(1-b_1 \nu) ]^2 + (2s^{(1)} t)^2\}}{b_1^2 \nu h(1-b_1 \nu) + b_1 \sqrt{h^2 (1-b_1 \nu)^2 + (2s^{(1)} t)^2 (1-b_1^2 \nu^2)}} \\ t_{ind} = \frac{b_1^2 \nu h(1-b_1 \nu) + b_1 \sqrt{h^2 (1-b_1 \nu)^2 + (2s^{(1)} t)^2 (1-b_1^2 \nu^2)}}{1 - b_1^2 \nu^2}$$

及

$$K^{dnd}(t) = K^{0,1}(t) = \frac{1}{2f^2} \int_{b_1 h + t_{dnd}}^t \int_{b_1 h}^{t+t_{dnd}} \frac{\sqrt{2(1-b_1 \nu)}}{\sqrt{f(t-\zeta)}} \times \text{Re} \left[ \frac{f^+(Y_2^+) G(Y_1^+, Y_2^+) \frac{\partial Y_1^+}{\partial t_1} \frac{\partial Y_2^+}{\partial t_2} - f^+(Y_2^+) G(Y_1^-, Y_2^+) \frac{\partial Y_1^-}{\partial t_1} \frac{\partial Y_2^+}{\partial t_2}}{r_{1+}^*(Y_2^+) r_{1+}^*(Y_1^+) - r_{1+}^*(Y_2^+) r_{1+}^*(Y_1^-)} \right] dt d\zeta. \quad (33)$$

其中

$$y_1^\pm = \frac{-t_1}{h(1-b_1\nu)} \pm i\nu, \quad t_{ind} = \frac{-2S^{(1)}b_1}{\sqrt{1-b_1^2\nu^2}}$$

$$y_2^\pm = \frac{-2b_1^2\nu S^{(1)} \pm i\sqrt{(1-b_1^2\nu^2)t_2^2 - (2S^{(1)}b_1^2)^2}}{2S^{(1)}(1-b_1^2\nu^2)}, \quad t_1 + t_2 = t$$

我們由上述關係發現規律而且能將其寫成一簡單之顯示解如下

$$K(t) = K^0(t) + \sum_{m=1}^{\infty} 2K^m(t) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^n K^{0,n}(t) + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n+1} K^{m,n}(t). \quad (34)$$

## 六、數值結果

由圖 3 可以發現異向性的單層板，再所計算的應力波通過靜止裂紋尖端時均已趨近其個別之靜力解。圖 4 則發現所計算的應力波通過擴展裂紋尖端會慢慢趨近一穩態解。圖 5 則發現多層板的異向性之擴展裂紋，如果  $b_1/b_2$  愈小(上下層材料的波傳速度愈慢)則期相對之穩態解愈小。圖 6 則比較了不同的擴展裂紋速度；發現當其速度愈快，則其相對之穩態解收斂的愈快。

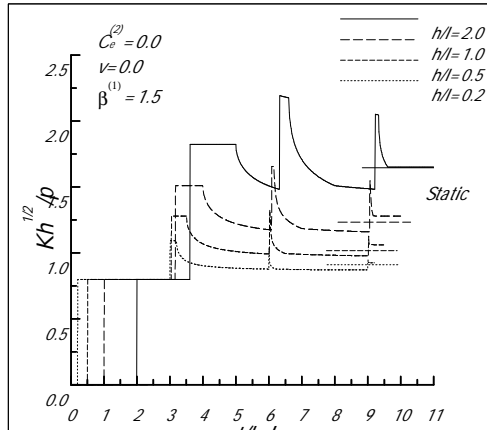


圖 3 單層板之異向性靜止裂紋問題應力圖

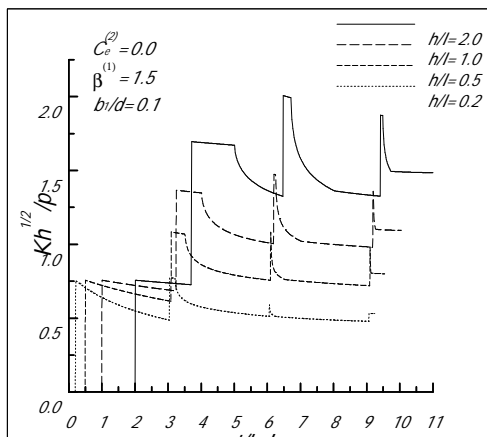


圖 4 單層板之異向性擴展裂紋問題應力圖

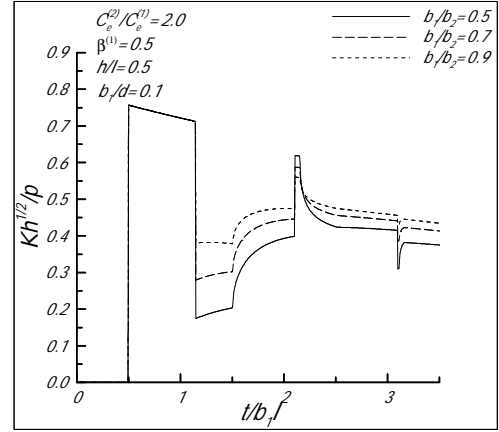


圖 5 多層板之異向性擴展裂紋問題應力圖

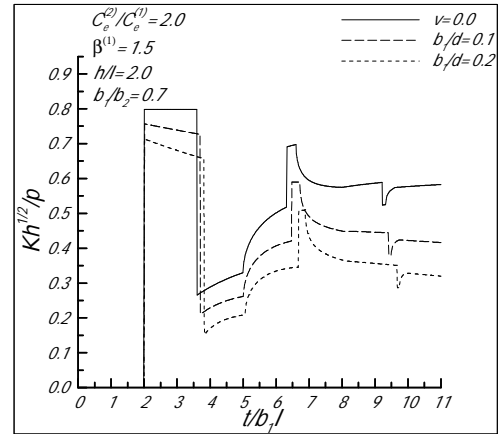


圖 6 多層板之異向性擴展裂紋問題應力圖

## 七、計畫成果自評

我們已成功的使用了一修正之座標轉換關係將異向性反平面問題轉換成等向性反平面問題，並能將所有應力波對裂紋尖端應力強度因子的貢獻寫成一顯示解，由數值結果中也發現反射波對應力強度因子有很明顯的影響。

## 八、參考文獻

- [1] Freund, L. B., 1974b, "Crack Propagation in an Elastic Solid Subjected to General Loading- IV . Obliquely Incident Stress Pulse," *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol. 22, pp. 137-146.
- [2] Ma, C. C., 1988, "Initiation, Propagation and kinking of an In-plane Crack," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 587-595.
- [3] Ma, C. C., 1990, "Dynamic Mixed Mode I - II Crack Kinking Under Oblique Stress Wave Loading in Brittle Solids," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 117-127.
- [4] Ma, C. C., and Ing, Y. S., 1997, "Dynamic Crack Propagation in a Layered Medium Under Anti-Plane Shear," *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 64, pp. 66-72.
- [5] Ma, C. C., and Liao, C. Y., 1999, "Elastodynamic Analysis of Anti-plane Anisotropic Interface Cracks," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, pp. 891-898.
- [6] 蔡傳輝(1991). "彈性波基本解與動力破壞之理論解析", 國立台灣大學機械工程研究所博士論文。